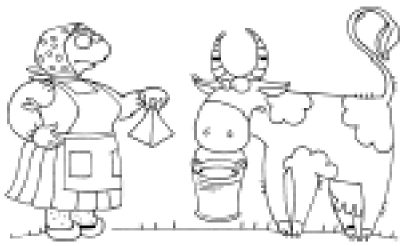
Андреев Николай Николаевич
Калиниченко Михаил Александрович

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ФИЛЬМЫ О ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ И НЕРЕШЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИКИ ФИЛЬМ ЧЕТВЕРТЫЙ. УВЕЛИЧЕНИЕ ОБЪЕМА ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Вступление

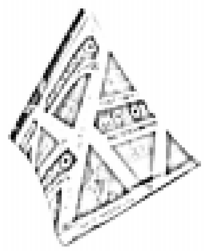
Помните, как выглядел пакет молока в советское время? Удивительно, что вся страна покупала эти пакеты почти каждый день на протяжении более 20 лет, но мало кто сейчас помнит точно, что на них было нарисовано...



Но все, конечно, помнят, что пакет молока был в виде тетраэдра (правильной треугольной пирамиды). Изобрела пакеты в виде тетраэдра фирма Тетра-Пак (Tetra Pak) в 40-х годах XX века, откуда и берет свое название. В те годы эта фирма сделала два важных нововведения. Во-первых, жидкие продукты начали наливать в картон. Во-вторых, изготовление тетраэдральных пакетов было настолько простым, что его можно было поместить прямо на молокозаводах.

Кадр 1.

Вот так выглядел наиболее распространенный пакет молока в Советском Союзе. Красные и синие треугольники, имел форму тетраэдра (конечно, с небольшими искажениями).

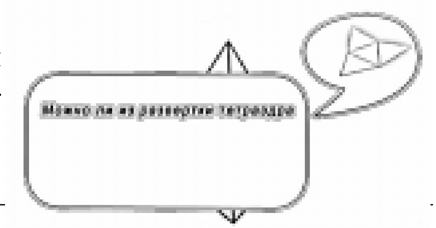


Кадр 2.

Можно ли из куска картона, из которого сделан этот молочный пакет, сделать пакет, с большим объемом чем сам тетраэдр?

Кадр 3.

Математически задача формулируется так: можно ли из развертки тетраэдра сделать многогранник с большим объемом?



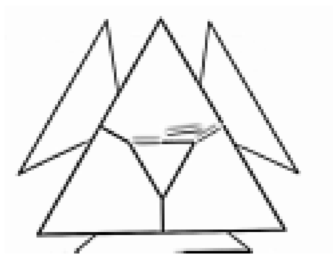
Кадр 4.

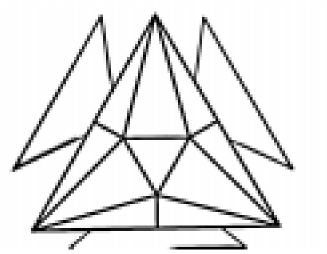
По теореме А.Д. Александрова выпуклый многогранник с той же разверткой, но большим объемом сделать нельзя. Но может быть можно сделать невыпуклый с большим объемом?

Удивительно, но оказывается что можно!

Кадр 5–6.

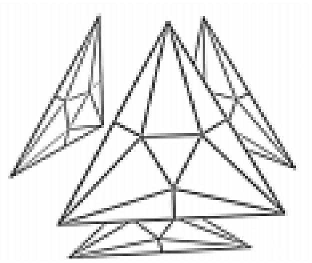
Давайте проследим за конструкцией, предложенной Дэвидом Блекером в 1996 году. Разведем грани, и на каждой добавим дополнительные вершины и ребра. Возьмем центральный правильный треугольник, определенный соотношением, что его сторона в два раза больше расстояния от его вершины до стороны грани. Проведем дополнительные ребра.

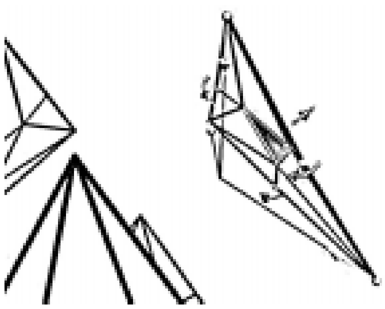


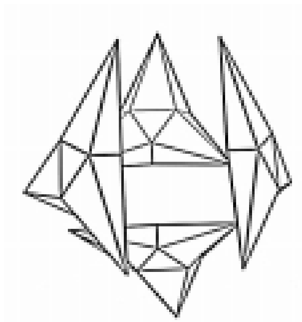


Кадр 7–9.

Те же построения сделаем на каждой грани. Изогнем каждую грань следующим образом – углы и середины сторон в сторону центра, а центральный треугольничек – от центра. Все грани изогнуты одинаково, и их можно склеить в многогранник. Некоторые новые грани лежат в одной плоскости и ребра между ними исчезают.





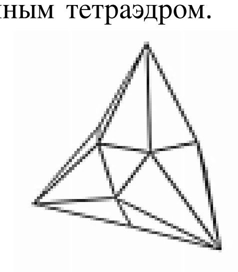


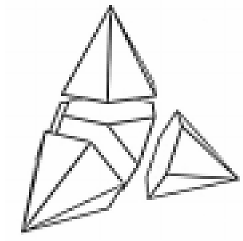
* *Александр Данилович Александров* (1912–1999) – российский математик, исследовавший обширный круг вопросов, включая геометрию выпуклых тел, теорию меры, теорию дифференциальных уравнений в частных производных и математические основания теории относительности.

Кадр 10-11.

Подсчитаем объем получившегося многогранника.

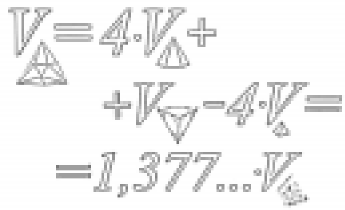
Для этого разобьем его на части. Полученный многогранник состоит из 4 одинаковых шестиугольных пирамидок и фигуры, которая является усеченным тетраэдром.

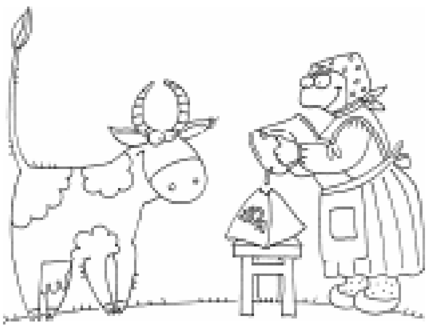




Кадр 12.

Чтобы проще посчитать объем, добавим усеченные у тетраэдра углы – маленькие тетраэдры, а от получившегося значения объема отнимем объем добавленных кусочков.



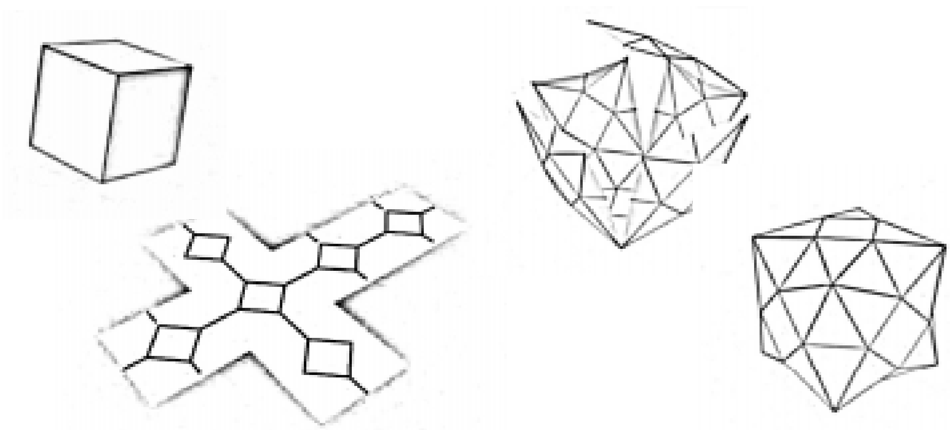


Кадр 13.

Оказывается, что объем полученного таким способом многогранника больше чем на 37,7 процентов превосходит объем изначального тетраэдра, имеющего ту же развертку! То есть из куска картона, из которого делались тетраэдральные пакеты, можно делать пакеты которые вместительнее более чем на треть!

Кадр 14-17.

Удивительно, но тетраэдр не является исключением. Оказывается, что из развертки любого выпуклого многогранника можно сделать невыпуклый многогранник с большим объемом. Эту теорему доказал в 1996 году Д. Блекер и привел алгоритм, как это делать.



Кадр 18.

К сожалению, полностью математическая задача не решена. Мы рассмотрели пример (самый хороший из найденных Блекером), который говорит, что объем выпуклого многогранника можно увеличить в 1,377 раз.

Кадр 19. **Нерешенная задача**

Насколько большим может быть отношение объема невыпуклого многогранника к объему данного выпуклого с той же разверткой (например, для тетраэдра), до сих пор неизвестно.

Кадр 20. **Литература**

1. *David D. Bleecker.* Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra // Journal Differential Geometry. 1996. V. 43. P. 505–526.

Кадр 21. **Титры**

Авторы фильма выражают благодарность:
Николаю Петровичу Долблину, Сергею Петровичу Коновалову, Алексею Савищеву.

Идея фильма: Николай Андреев.

Компьютерная графика: Михаил Калиниченко.

Андреев Николай Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук,
научный сотрудник
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,

Калиниченко Михаил Александрович,
художник проекта.